## 知识点 ‖ 椭圆的简单几何性质

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$$

1. 范围 $-a\leqslant x\leqslant a$ $-b\leqslant y\leqslant b$

2. 对称性 椭圆既是轴对称图形,又是中心对称图形.

3. 顶点与长轴、短轴

4. 离心率

离心率的定义:椭圆的焦距与长轴长的比$\frac{c}{a}$称为椭圆的离心率. 用$e$表示,即$e=\frac{c}{a}$. $0<e<1$.

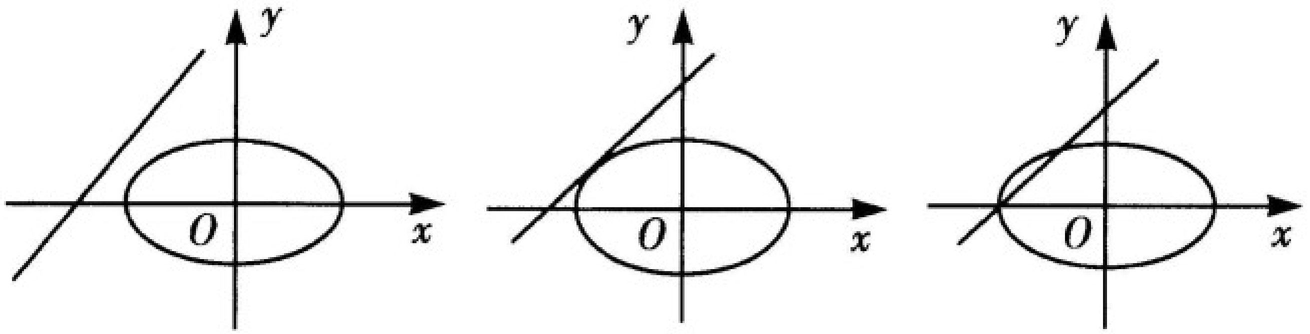
椭圆离心率的变化刻画了椭圆的扁平程度.

## 知识点 ‖ 椭圆的两种标准方程的几何性质比较

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0) \qquad \frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$$

## 知识点 直线与椭圆的位置关系

**1. 直线与椭圆的三种位置关系** 相离、相切、相交



相离　　相切　　相交

$$\begin{cases} y = kx + m, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases}$$

**2. 利用方程讨论直线与椭圆的位置关系**

$\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 直线与椭圆相交 $\Leftrightarrow$ 直线与椭圆有两个公共点；

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 直线与椭圆相切 $\Leftrightarrow$ 直线与椭圆有且只有一个公共点；

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 直线与椭圆相离 $\Leftrightarrow$ 直线与椭圆无公共点.

**1** 直线 $y = x + 1$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ 的位置关系是　　相交

**2.** 直线 $y = x + m$ 被椭圆 $2x^2 + y^2 = 2$ 截得的线段的中点的横坐标为 $\dfrac{1}{6}$，则中点的纵坐标为__ $-\dfrac{1}{2}$ __

3. 弦长问题　$P_1(x_1,y_1)$，　$P_2(x_2,y_2)$

$$|P_1P_2|=|x_1-x_2|\cdot\sqrt{1+k^2}=|y_1-y_2|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}(k\neq 0)$$

## 知识点4 ‖ 椭圆的几何性质的挖掘

1. 椭圆的通径　$\frac{2b^2}{a}$
2. 椭圆上到中心距离最远和最近的点
3. 焦半径的最值

## 知识点5 ‖ 椭圆定义的拓展

**椭圆的第二定义：**$\{P|\frac{|PF|}{d}=e,0<e<1$，其中 $F$ 为定点，$l$ 为定直线，$e$ 为离心率，$F\notin l$，$d$ 表示 $P$ 到直线 $l$ 的距离$\}$.

**椭圆的第三定义：**$\{P|k_{PA}\cdot k_{PB}=e^2-1,0<e<1$，其中 $k_{PA}$，$k_{PB}$分别表示点 $P$ 与两定点 $A$，$B$ 连线的斜率，$e$ 为离心率$\}$.

3．已知动点 $M(x,y)$ 到点 $F(-2\sqrt{2},0)$ 的距离与到定直线 $x=-6\sqrt{2}$ 的距离之比为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，求点 $M$ 的轨迹方程.

$$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=1$$

4. 已知点 $P$ 为椭圆 $x^2+2y^2=98$ 上一个动点，点 $A$ 的坐标为 $(0,5)$，求 $|PA|$ 的最值.

**解析▶** 设 $P(x,y)$，则

$|PA|=\sqrt{x^2+(y-5)^2}=\sqrt{x^2+y^2-10y+25}$，

因为点 $P$ 为椭圆 $x^2+2y^2=98$ 上一点，

所以 $x^2=98-2y^2$，$-7\leqslant y\leqslant 7$，

则 $|PA|=\sqrt{98-2y^2+y^2-10y+25}=\sqrt{-(y+5)^2+148}$，

因为 $-7\leqslant y\leqslant 7$，所以，当 $y=-5$ 时，$|PA|_{\max}=\sqrt{148}=2\sqrt{37}$；

当 $y=7$ 时，$|PA|_{\min}=2$.

**5.** 求经过点 $M(1,2)$，且与椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$ 有相同离心率的椭圆的标准方程.

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{\frac{9}{2}}=1 \text{ 或 } \frac{y^2}{6}+\frac{x^2}{3}=1$$

**6.** 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两焦点为 $F_1,F_2$，以 $F_1F_2$ 为边作正三角形，若椭圆恰好平分正三角形的另两条边，则椭圆的离心率为 $\underline{\sqrt{3}-1}$.

**7.** 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上存在一点 $M$，使得 $\angle F_1MF_2=90°$（$F_1,F_2$ 为椭圆的两个焦点），求椭圆的离心率 $e$ 的取值范围.

**解析▶** 设点 $M$ 的坐标是$(x_0,y_0)$,

则$\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1,\\ x_0^2+y_0^2=c^2.\end{cases}$消去 $y_0$,得 $x_0^2=\dfrac{a^2(c^2-b^2)}{c^2}$.

因为 $0\leqslant x_0^2\leqslant a^2$,所以$\begin{cases}\dfrac{a^2(c^2-b^2)}{c^2}\geqslant 0 & ①,\\ \dfrac{a^2(c^2-b^2)}{c^2}\leqslant a^2 & ②.\end{cases}$

由①得 $c^2\geqslant b^2$,即 $c^2\geqslant a^2-c^2$,所以 $a^2\leqslant 2c^2$,所以 $e^2=\dfrac{c^2}{a^2}\geqslant\dfrac{1}{2}$.

又 $0<e<1$,所以 $e\in[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1)$.

由②得 $c^2-b^2\leqslant c^2$,此式恒成立.

综上所述,所求椭圆的离心率 $e$ 的取值范围是$[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1)$.

**8.** 已知直线 $l: y=2x+m$，椭圆 $C: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. 试问当 $m$ 取何值时，直线 $l$ 与椭圆 $C$:

(1)有两个公共点；　　$\Delta>0$，即 $-3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$

(2)有且只有一个公共点；　$\Delta=0$，即 $m=\pm3\sqrt{2}$

(3)没有公共点.　　$\Delta<0$，即 $m<-3\sqrt{2}$ 或 $m>3\sqrt{2}$

**9.** 若直线 $y=kx+1$ 与焦点在 $x$ 轴上的椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1$ 总有公共点，求 $m$ 的取值范围.

**解析▶** ∵ 直线 $y=kx+1$ 过定点 $M(0,1)$，

由此得 $\begin{cases} 0<m<5, \\ \frac{0^2}{5}+\frac{1^2}{m}\leqslant 1, \end{cases}$ 解得 $1\leqslant m<5$.

10. 设 $F_1$，$F_2$ 分别是椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，过 $F_1$ 斜率为 1 的直线 $l$ 与 $E$ 相交于 $A$，$B$ 两点，且 $|AF_2|$，$|AB|$，$|BF_2|$ 成等差数列.

(1) 求 $E$ 的离心率；

(2) 设点 $P(0,-1)$ 满足 $|PA|=|PB|$，求 $E$ 的方程.

**解析**▶ (1) 由椭圆的定义知 $|AF_2|+|BF_2|+|AB|=4a$，

又 $2|AB|=|AF_2|+|BF_2|$，得 $|AB|=\frac{4}{3}a$，直线 $l$ 的方程为 $y=x+c$，其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $A$，$B$ 两点的坐标满足方程组

$$\begin{cases} y=x+c, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \end{cases}$$ 消去 $y$，化简得

$(a^2+b^2)x^2+2a^2cx+a^2(c^2-b^2)=0$,则

$$x_1+x_2=\frac{-2a^2c}{a^2+b^2},x_1x_2=\frac{a^2(c^2-b^2)}{a^2+b^2}$$

因为直线 $AB$ 的斜率为 1,所以 $|AB|=\sqrt{2}|x_2-x_1|=$

$\sqrt{2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$,即$\frac{4}{3}a=\frac{4ab^2}{a^2+b^2}$,故 $a^2=2b^2$,

所以 $E$ 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)设线段 $AB$ 的中点为 $N(x_0,y_0)$,由(1)知 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=$

$\frac{-a^2c}{a^2+b^2}=-\frac{2c}{3},y_0=x_0+c=\frac{c}{3}$.

由$|PA|=|PB|$,得 $k_{PN}=-1$,即$\frac{y_0+1}{x_0}=-1$,把 $x_0=-\frac{2c}{3},y_0=\frac{c}{3}$

代入，得 $c=3$，从而 $a=3\sqrt{2}$，$b=3$. 故椭圆 $E$ 的方程为 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

11. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，过右焦点 $F$ 的直线 $l$ 与 $C$ 相交于 $A$，$B$ 两点，当直线 $l$ 的斜率为 1 时，坐标原点 $O$ 到直线 $l$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求 $a$，$b$ 的值；

(2) $C$ 上是否存在点 $P$，使得当直线 $l$ 绕 $F$ 转到某一位置时，有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 成立？若存在，求出点 $P$ 的坐标与直线 $l$ 的方程；若不存在，请说明理由.

**解析▶**(1)设 $F(c,0)$,当直线 $l$ 的斜率为 1 时,其方程为 $x-y-c=0$,则原点 $O$ 到直线 $l$ 的距离为 $\frac{|0-0-c|}{\sqrt{2}}=\frac{c}{\sqrt{2}}$,故 $\frac{c}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$c=1$,由 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,得 $a=\sqrt{3}$,$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2}$.

(2)$C$ 上存在点 $P$,使得当直线 $l$ 绕 $F$ 转到某一位置时,有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 成立.

由(1)知 $C$ 的方程为 $2x^2+3y^2=6$. 设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

①当直线 $l$ 不垂直于 $x$ 轴时,设 $l$ 的方程为 $y=k(x-1)$.

$C$ 上的点 $P$ 使 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 成立的充要条件是点 $P$ 的坐标为 $(x_1+x_2,y_1+y_2)$,且 $2(x_1+x_2)^2+3(y_1+y_2)^2=6$,

整理得 $2x_1^2+3y_1^2+2x_2^2+3y_2^2+4x_1x_2+6y_1y_2=6$.

又点 $A,B$ 在 $C$ 上，即 $2x_1^2+3y_1^2=6, 2x_2^2+3y_2^2=6.$

故 $2x_1x_2+3y_1y_2+3=0$　( * ).

将 $y=k(x-1)$ 代入 $2x^2+3y^2=6$,

化简得 $(2+3k^2)x^2-6k^2x+3k^2-6=0$,

于是 $x_1+x_2=\dfrac{6k^2}{2+3k^2}, x_1x_2=\dfrac{3k^2-6}{2+3k^2}$,

所以 $y_1y_2=k^2(x_1-1)(x_2-1)=\dfrac{-4k^2}{2+3k^2}$,

代入( * )，解得 $k^2=2$，故 $k=\pm\sqrt{2}$，此时 $x_1+x_2=\dfrac{3}{2}$,

于是 $y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=-\dfrac{k}{2}$，即 $P(\dfrac{3}{2},-\dfrac{k}{2})$.

所以 $2\times(\frac{3}{2})^2+3\times(-\frac{k}{2})^2=6$，所以 $k=\pm\sqrt{2}$.

因此，当 $k=-\sqrt{2}$ 时，$P(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，直线 $l$ 的方程为 $\sqrt{2}x+y-\sqrt{2}=0$；

当 $k=\sqrt{2}$ 时，$P(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$，直线 $l$ 的方程为 $\sqrt{2}x-y-\sqrt{2}=0$.

②当直线 $l$ 垂直于 $x$ 轴时，由 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(2,0)$ 知，$C$ 上不存在点 $P$ 使 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 成立.

综上，$C$ 上存在点 $P(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 使 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 成立，此时直线 $l$ 的方程为 $\sqrt{2}x+y-\sqrt{2}=0$；存在点 $P(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 使 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 成立，此时直线 $l$ 的方程为 $\sqrt{2}x-y-\sqrt{2}=0$.

1 2. (2015·北京)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,点$P(0,1)$和点$A(m,n)(m\neq0)$都在椭圆 $C$ 上,直线 $PA$ 交 $x$ 轴于点 $M$.

(1)求椭圆 $C$ 的方程,并求点 $M$ 的坐标(用 $m,n$ 表示);

(2)设 $O$ 为原点,点 $B$ 与点 $A$ 关于 $x$ 轴对称,直线 $PB$ 交 $x$ 轴于点 $N$. 问:$y$ 轴上是否存在点 $Q$,使得$\angle OQM=\angle ONQ$? 若存在,求点 $Q$ 坐标;若不存在,说明理由.

**解析▶** (1)由题意得$\begin{cases} b=1, \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$ 解得 $a^2=2$.

故椭圆 $C$ 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

设 $M(x_M,0)$.

因为 $m\neq 0$,所以 $-1<n<1$.

直线 $PA$ 的方程为 $y-1=\frac{n-1}{m}x$,

所以 $x_M=\frac{m}{1-n}$,即 $M(\frac{m}{1-n},0)$.

(2)因为点 $B$ 与点 $A$ 关于 $x$ 轴对称,所以 $B(m,-n)$.

设 $N(x_N,0)$,则 $x_N=\frac{m}{1+n}$.

"存在点 $Q(0,y_Q)$ 使得 $\angle OQM=\angle ONQ$"等价于"存在点 $Q(0,y_Q)$ 使得 $\frac{|OM|}{|OQ|}=\frac{|OQ|}{|ON|}$",即 $y_Q$ 满足 $y_Q^2=|x_M||x_N|$.

因为 $x_M=\frac{m}{1-n}$,$x_N=\frac{m}{1+n}$,$\frac{m^2}{2}+n^2=1$,

所以 $y_Q^2=|x_M||x_N|=\dfrac{m^2}{1-n^2}=2.$

所以 $y_Q=\sqrt{2}$ 或 $y_Q=-\sqrt{2}$.

故在 $y$ 轴上存在点 $Q$,使得 $\angle OQM=\angle ONQ$,点 $Q$ 的坐标为 $(0,\sqrt{2})$ 或 $(0,-\sqrt{2})$.

**13** (2016·乙卷(全国卷Ⅰ))设圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 的圆心为 $A$,直线 $l$ 过点 $B(1,0)$ 且与 $x$ 轴不重合,$l$ 交圆 $A$ 于 $C$,$D$ 两点,过 $B$ 作 $AC$ 的平行线交 $AD$ 于点 $E$.

(1)证明 $|EA|+|EB|$ 为定值,并写出点 $E$ 的轨迹方程;

(2)设点 $E$ 的轨迹为曲线 $C_1$,直线 $l$ 交 $C_1$ 于 $M$,$N$ 两点,过 $B$ 且与 $l$ 垂直的直线与圆 $A$ 交于 $P$,$Q$ 两点,求四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围.

**解析▶**(1)点 $E$ 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(y\neq 0)$(在 2.2.1 节已经解答过,此处过程略).

(2)**方法一** 当 $l$ 与 $x$ 轴不垂直时,设 $l$ 的方程为 $y=k(x-1)(k\neq 0)$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$,

则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+3}$,$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$,

所以 $|MN|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\frac{12(k^2+1)}{4k^2+3}$.

过点 $B(1,0)$ 且与 $l$ 垂直的直线 $m:y=-\frac{1}{k}(x-1)$，$A$ 到 $m$ 的距离为 $\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}$，所以 $|PQ|=2\sqrt{4^2-(\frac{2}{\sqrt{k^2+1}})^2}=4\sqrt{\frac{4k^2+3}{k^2+1}}$．

故四边形 $MPNQ$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|MN||PQ|=12\sqrt{1+\frac{1}{4k^2+3}}$．

可得当 $l$ 与 $x$ 轴不垂直时，四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围为 $(12,8\sqrt{3})$．

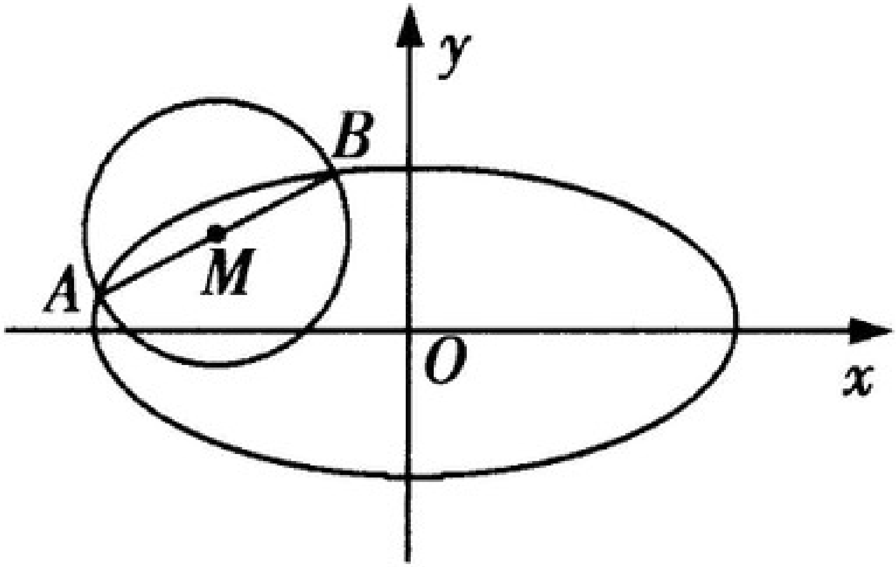
当 $l$ 与 $x$ 轴垂直时，其方程为 $x=1$，$|MN|=3$，$|PQ|=8$，四边形 $MPNQ$ 的面积为 12.

综上，四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围为 $[12,8\sqrt{3})$．

**14.** (2015·陕西)已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的半焦距为 $c$，原点 $O$ 到经过两点 $(c,0)$，$(0,b)$ 的直线的距离为 $\frac{1}{2}c$.

(1)求椭圆 $E$ 的离心率;

(2)如图 2. 2. 2－16，$AB$ 是圆 $M:(x+2)^2+(y-1)^2=\frac{5}{2}$ 的一条直径，若椭圆 $E$ 经过 $A,B$ 两点，求椭圆 $E$ 的方程.



**解析▶**(1)过点$(c,0)$,$(0,b)$的直线方程为 $bx+cy-bc=0$,

则原点 $O$ 到该直线的距离 $d=\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{bc}{a}$,

由 $d=\frac{1}{2}c$,得 $a=2b=2\sqrt{a^2-c^2}$,解得离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2)**方法一** 由(1)知,椭圆 $E$ 的方程为 $x^2+4y^2=4b^2$ ①.

依题意,圆心 $M(-2,1)$是线段 $AB$ 的中点,且 $|AB|=\sqrt{10}$.

易知,$AB$ 与 $x$ 轴不垂直,设其方程为 $y=k(x+2)+1$,代入①得

$(1+4k^2)x^2+8k(2k+1)x+4(2k+1)^2-4b^2=0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=-\frac{8k(2k+1)}{1+4k^2}$,

$$x_1x_2=\frac{4(2k+1)^2-4b^2}{1+4k^2}.$$

由 $x_1+x_2=-4$，得 $-\dfrac{8k(2k+1)}{1+4k^2}=-4$，解得 $k=\dfrac{1}{2}$.

从而 $x_1x_2=8-2b^2$.

于是 $|AB|=\sqrt{1+(\dfrac{1}{2})^2}\,|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=$

$\sqrt{10(b^2-2)}$.

由 $|AB|=\sqrt{10}$，得 $\sqrt{10(b^2-2)}=\sqrt{10}$，解得 $b^2=3$.

故椭圆 $E$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

15. (2013·卓越联盟自主招生)设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1(a>2)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$,斜率为 $k$ 的直线 $l$ 过点 $E(0,1)$ 且与椭圆交于 $C,D$ 两点.

(1)求椭圆的方程;

(2)若直线 $l$ 与 $x$ 轴相交于点 $G$,且$\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{DE}$,求 $k$ 的值;

(3)设点 $A$ 为椭圆的下顶点,$k_{AC}$,$k_{AD}$分别为直线 $AC,AD$ 的斜率,证明:对任意的 $k$,恒有 $k_{AC}\cdot k_{AD}=-2$.

**解析**▶(1)由题可得 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-4}{a^2}=\frac{1}{3}$,解得 $a^2=6$,所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2) 由 $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{DE}$ 可知 $|GC|=|DE|$，若直接计算 $|GC|=|DE|$，则运算量较大，故可考虑利用 $CD$，$GE$ 的中点重合来解题.

设直线 $l$ 的方程为 $y=kx+1$，由 $\begin{cases} y=kx+1, \\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 得 $(2+3k^2)x^2+6kx-9=0$，

设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{-6k}{2+3k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-9}{2+3k^2}$，则

$CD$ 中点的横坐标为 $x_0=\dfrac{-3k}{2+3k^2}$. 又 $E(0,1)$，$G\left(-\dfrac{1}{k},0\right)$，则

$GE$ 中点的横坐标为 $x_0'=-\dfrac{1}{2k}$，由 $CD$，$GE$ 的中点重合得 $\dfrac{-3k}{2+3k^2}=-\dfrac{1}{2k}$，解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(3) 因为 $A(0,-2)$,

所以 $k_{AC} \cdot k_{AD} = \frac{y_1+2}{x_1} \cdot \frac{y_2+2}{x_2} = \frac{kx_1+3}{x_1} \cdot \frac{kx_2+3}{x_2} = \frac{k^2x_1x_2+3k(x_1+x_2)+9}{x_1x_2} = -2$,即对任意的 $k$,恒有 $k_{AC} \cdot k_{AD} = -2$.

16. (卓越联盟自主招生)已知椭圆的两个焦点为 $F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$,且椭圆与直线 $y=x-\sqrt{3}$ 相切.

(1)求椭圆的方程;

(2)过 $F_1$ 作两条互相垂直的直线 $l_1$,$l_2$,与椭圆分别交于点 $P$,$Q$ 及 $M$,$N$,求四边形 $PMQN$ 面积的最大值与最小值.

**解析**▶(1)设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,因为它与直线 $y=x-\sqrt{3}$ 只有一个公共点,

所以方程组$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ y=x-\sqrt{3}\end{cases}$只有一组解，消去 $y$，整理得$(a^2+b^2)\cdot x^2-2\sqrt{3}a^2x+3a^2-a^2b^2=0$.

所以$\Delta=(-2\sqrt{3}a^2)^2-4(a^2+b^2)(3a^2-a^2b^2)=0$，化简得$a^2+b^2=3$.

又焦点为$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，所以$a^2-b^2=1$，联立上式解得$a^2=2,b^2=1$.

所以椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2) 若直线 $PQ$ 的斜率不存在（或为 0），则 $S_{四边形PMQN}=\dfrac{|PQ|\cdot|MN|}{2}=\dfrac{2\sqrt{1-\dfrac{1}{2}}\times2\sqrt{2}}{2}=2$.

若直线 $PQ$ 的斜率存在，设为 $k(k\neq0)$，则直线 $MN$ 的斜率为 $-\frac{1}{k}$.

所以直线 $PQ$ 的方程为 $y=kx+k$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

联立方程得 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=kx+k,\end{cases}$ 化简得 $(2k^2+1)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$.

则 $x_1+x_2=\frac{-4k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2k^2-2}{2k^2+1}$，

所以 $|PQ|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$

$$=\frac{\sqrt{(1+k^2)[16k^4-4(2k^2-2)(2k^2+1)]}}{2k^2+1}=2\sqrt{2}\times\frac{k^2+1}{2k^2+1},$$

同理可得$|MN|=2\sqrt{2}\times\frac{k^2+1}{2+k^2}$.

所以 $S_{四边形PMQN}=\frac{|PQ|\cdot|MN|}{2}=4\times\frac{(k^2+1)^2}{(2+k^2)(2k^2+1)}=4\times$

$\frac{k^4+2k^2+1}{2k^4+5k^2+2}=4\times\left(\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{2}k^2}{2k^4+5k^2+2}\right)=4\times\left(\frac{1}{2}-\right.$

$\left.\frac{k^2}{4k^4+10k^2+4}\right)=4\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4k^2+\frac{4}{k^2}+10}\right)$.

因为$4k^2+\frac{4}{k^2}+10\geqslant 2\sqrt{4k^2\cdot\frac{4}{k^2}}+10=18$(当且仅当 $k^2=1$ 时

取等号),

所以$\dfrac{1}{4k^2+\dfrac{4}{k^2}+10}\in(0,\dfrac{1}{18}]$，所以$4\times(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4k^2+\dfrac{4}{k^2}+10})\in$

$[\dfrac{16}{9},2)$.

综上所述，四边形 $PMQN$ 面积的最小值为$\dfrac{16}{9}$，最大值为 2.